線性代數第14章

內積inner product，外積

正交基底，正則基底

正交投影

Gram-Schmidt orthogonalization

QR分解法

矩陣A的正交對角化

陳擎文老師

1. 典型範例

碩士班考題

Let $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$

(1) Verify that $\mathbf{a}$ and $\mathbf{b}$ are orthogonal.

(2) Find a nonzero vector in R^4 which is orthogonal to both $\mathbf{a}$ and $\mathbf{b}$

（91 朝陽通訊）

碩士班考題

Apply the Gram-Schmidt process to $\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$,

and write the result in the form $\mathbf{A} = \mathbf{QR}$, with $\mathbf{R}$ upper-triangular

and $\mathbf{Q}$ having orthonormal columns （交大電信）

碩士班考題

考慮佈於 R^4 中的三個向量如下：

$\mathbf{x}^1 = [1 \quad 0 \quad 1 \quad 0]$, $\mathbf{x}^2 = [2 \quad 1 \quad 2 \quad 1]$, $\mathbf{x}^3 = [0 \quad 2 \quad -2 \quad 2]$

(1)試找出 $\mathrm{span}\{\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \mathbf{x}^3\}$ 中的一組正交且單一化集 $\{\mathbf{y}^1, \mathbf{y}^2, \mathbf{y}^3\}$

(2)試找出 R^4 中單位向量 $\mathbf{y}^4$，其與 $\mathrm{span}\{\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \mathbf{x}^3\}$ 垂直

（83 成大電機）

(1) Gram-Schmidt 正交程序

$$\mathbf{y}^1=\frac{\mathbf{x}^1}{|\mathbf{x}^1|}=\frac{[1\quad 0\quad 1\quad 0]}{\sqrt{2}}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{y}^2=\mathbf{x}^2-(\mathbf{x}^2,\mathbf{y}^1)\mathbf{y}^1$$

$$=[2\quad 1\quad 2\quad 1]-[2\quad 0\quad 2\quad 0]$$

$$=[0\quad 1\quad 0\quad 1]$$

Normalize：$\mathbf{y}^2=\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$

$$\mathbf{y}^3=\mathbf{x}^3-(\mathbf{x}^3,\mathbf{y}^1)\mathbf{y}^1-(\mathbf{x}^3,\mathbf{y}^2)\mathbf{y}^2$$

$$=[0\quad 2\quad -2\quad 2]+[1\quad 0\quad 1\quad 0]-[0\quad 2\quad 0\quad 2]$$

$$=[1\quad 0\quad -1\quad 0]$$

Normalize：$\mathbf{y}^3=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0\end{bmatrix}$

(2)令 $\mathbf{y}^4=[y_1\quad y_2\quad y_3\quad y_4]$由 $\mathbf{y}^4\perp \mathrm{span}\{\mathbf{y}^1\quad \mathbf{y}^2\quad \mathbf{y}^3\}$可知

$$\begin{cases}y_1+y_3=0\\ y_2+y_4=0\\ y_1-y_3=0\end{cases}\Rightarrow y_1=y_3=0,\ y_2=-y_4$$

再由$|\mathbf{y}^4|=1$ 知 $\mathbf{y}^4=\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$

碩士班考題

Given a 3×3 matrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

A can also be decomposed as **A** = **QR**, where **Q** is a matrix having orthonormal columns, **R** is a upper-triangular matrix, Find **Q** and **R** by G-S process. （交大電子）

$$\mathbf{e}_2=\begin{bmatrix}2\\1\\4\end{bmatrix}-\frac{6}{2}\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix},\ \|\mathbf{e}_2\|=\sqrt{3}$$

$$\mathbf{e}_3=\begin{bmatrix}3\\1\\6\end{bmatrix}-\frac{9}{2}\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}-\frac{4}{3}\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{-1}{6}\\\frac{-1}{3}\\\frac{1}{6}\end{bmatrix},\ \|\mathbf{e}_3\|=\frac{1}{\sqrt{6}}$$

將上述過程表示為矩陣形式

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&1\\1&4&6\end{bmatrix}=[\mathbf{a}_1\quad\mathbf{a}_2\quad\mathbf{a}_3]=[\mathbf{e}_1\quad\mathbf{e}_2\quad\mathbf{e}_3]\begin{bmatrix}1&3&\frac{9}{2}\\0&1&\frac{4}{3}\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{\mathbf{e}_1}{\|\mathbf{e}_1\|}&\frac{\mathbf{e}_2}{\|\mathbf{e}_2\|}&\frac{\mathbf{e}_3}{\|\mathbf{e}_3\|}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\|\mathbf{e}_1\|&0&0\\0&\|\mathbf{e}_2\|&0\\0&0&\|\mathbf{e}_3\|\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&3&\frac{9}{2}\\0&1&\frac{4}{3}\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{\mathbf{e}_1}{\|\mathbf{e}_1\|}&\frac{\mathbf{e}_2}{\|\mathbf{e}_2\|}&\frac{\mathbf{e}_3}{\|\mathbf{e}_3\|}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\|\mathbf{e}_1\|&3\|\mathbf{e}_1\|&\frac{9}{2}\|\mathbf{e}_1\|\\0&\|\mathbf{e}_2\|&\frac{4}{3}\|\mathbf{e}_2\|\\0&0&\|\mathbf{e}_3\|\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{-1}{\sqrt{3}}&\frac{-1}{\sqrt{6}}\\0&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{-2}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{2}&3\sqrt{2}&\frac{9}{\sqrt{2}}\\0&\sqrt{3}&\frac{4}{\sqrt{3}}\\0&0&\frac{1}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}=\mathbf{QR}$$

碩士班考題

$$W = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

(1) Find an orthogonal basis of W.

(2) Find a basis of $W^{\perp}$. （95 銘傳統計資訊所）

碩士班考題

Consider three vectors in R^3: $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

(a)Use Gram-Schmidt process to normalize these vectors

(b)Let $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Write $\mathbf{A} = \mathbf{QR}$, where the columns of $\mathbf{Q}$ are those obtained in (1) and $\mathbf{R}$ is an upper triangular matrix.

（95 彰師大統計資訊所）

碩士班考題

例 25： Let $\mathbf{a}_1=[1,1,0]'$, $\mathbf{a}_2=[2,3,0]'$ and $\mathbf{b}=[4,5,6]^T$. Find the projection vector of $\mathbf{b}$ onto the plane that is spanned by the vectors $\mathbf{a}_1$ and $\mathbf{a}_2$. （95 清華資應所）

解 令 $W=\text{span}\{\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2\}$, $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 3\\ 0 & 0\end{bmatrix}$，則 $\mathbf{b}$ 在 W 上的 projection vector 為

$$\mathbf{A}(\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{b}=\begin{bmatrix}4\\5\\0\end{bmatrix}$$

碩士班考題

What is the projection of (1, 1, 1) onto the plane spanned by (1, 0, 0) and (1, 0, −1)? （清大資工）

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\Rightarrow \mathbf{A}\left(\mathbf{A}^T\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^T\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$$

2. 內積inner product

模norm = 長度length = $||v||$

向量空間的內積inner product

- 之前我們介紹過的是：
  - 兩個向量的：點積dot product
- 本章節，
  - 1. 將把兩個向量的點積，擴展應用到
  - 2. 所有廣義的向量空間的：內積inner product

內積inner product (page.222)

- (1). 模norm = 長度length = ||v||
  - V中之向量v的「模(長度)」= $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}$
  - V為實數內積空間
- (2). 向量的「距離」＝d(u, v)

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \sqrt{\langle \mathbf{u} - \mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v} \rangle}$$

- (3). 模＝1的向量＝單位向量(unit vector)

內積符合的定理（page. 222）

- 若 u 和 v 為實數內積空間 V 中的向量，且 k 為純量，則
- (a) $\|\mathbf{v}\| \geq 0$，且等號成立時，若且唯若 $\mathbf{v} = 0$
- (b) $\|k\mathbf{v}\| = |k|\ \|\mathbf{v}\|$
- (c) $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = d(\mathbf{v}, \mathbf{u})$
- (d) $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \geq 0$，且等號成立時，若且唯若 $\mathbf{u} = \mathbf{v}$。

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = w_1u_1v_1 + w_2u_2v_2 + \cdots + w_nu_nv_n$$

加權式尤拉內積(page. 223)

- u=(u_1, u_2......)和v=(v_1, v_2.....)

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = w_1 u_1 v_1 + w_2 u_2 v_2 + \cdots + w_n u_n v_n$$

- (w1, w2⋯)為權重weight

範例3-1：R^2 中的特殊單位圓

- (1). 使用尤拉內積，繪出 R^2 中 xy–座標系統的單位圓

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2$$

(page. 225)

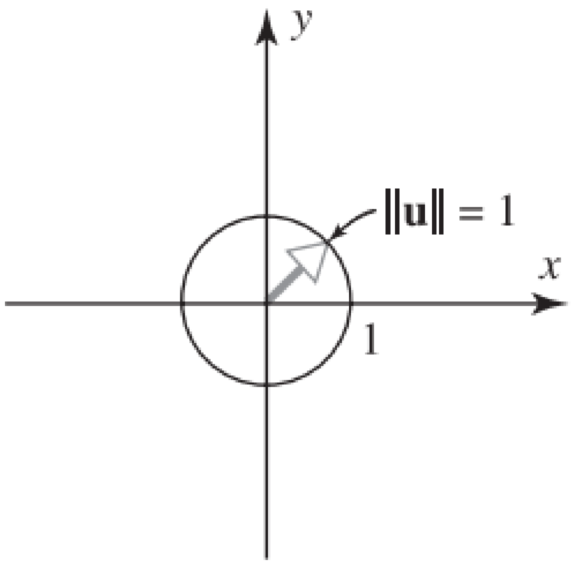
範例3-1：R^2 中的特殊單位圓(page. 225)

- (1). u=(x, y), 則uu內積=《u. u》

$$\|\mathbf{u}\| = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle^{1/2} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

單位圓的方程式為 $\sqrt{x^2 + y^2} = 1$

$$x^2 + y^2 = 1$$



(a) 使用標準尤拉內積的單位圓

範例3-2：R^2 中的特殊單位圓

- (1). 使用**加權式尤拉內積**，繪出 R^2 中 xy–座標系統的單位圓

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \frac{1}{9}u_1v_1 + \frac{1}{4}u_2v_2$$

(page. 225)

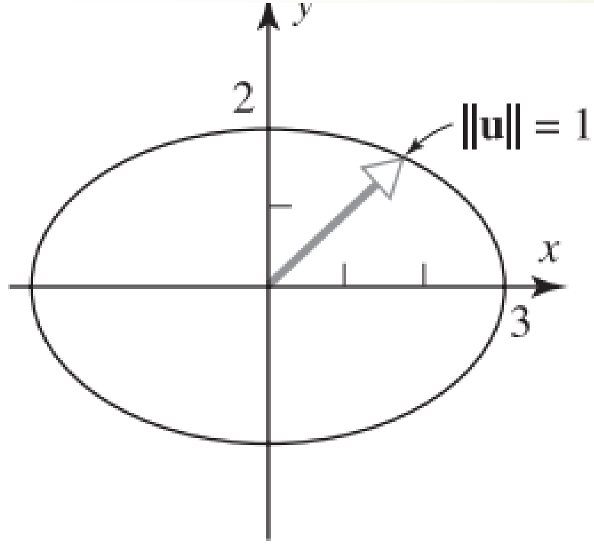
範例3-2：R^2 中的特殊單位圓(page. 225)

- (1). u=(x, y), 則uu內積=《u. u》

$$\|\mathbf{u}\| = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle^{1/2} = \sqrt{\tfrac{1}{9}x^2 + \tfrac{1}{4}y^2}$$

單位圓的方程式為 $\sqrt{\tfrac{1}{9}x^2 + \tfrac{1}{4}y^2} = 1$

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$



(b) 使用加權式尤拉內積的單位圓

3. 範數＝
向量內積的長度

向量內積的長度=範數

- 空間向量= 設 $\begin{pmatrix} x_{1i} \\ x_{2i} \\ \vdots \\ x_{ni} \end{pmatrix}$ 爲 R^n 的任意元素

- 向量的長度= $\sqrt{x_{1i}^2 + x_{2i}^2 + \cdots + x_{ni}^2}$

- 長度(範數)符號= $\left\| \begin{pmatrix} x_{1i} \\ x_{2i} \\ \vdots \\ x_{ni} \end{pmatrix} \right\|$

範例1：求向量$(1, \sqrt{3})$的範數

$$\left\|\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$$

範例2：求向量$(\sqrt{2}-\sqrt{6},\sqrt{2}+\sqrt{6})$的範數

$$\left\|\begin{pmatrix}\sqrt{2}-\sqrt{6}\\ \sqrt{2}+\sqrt{6}\end{pmatrix}\right\|=\sqrt{(\sqrt{2}-\sqrt{6})^2+(\sqrt{2}+\sqrt{6})^2}$$

$$=\sqrt{2-2\sqrt{12}+6+2+2\sqrt{12}+6}$$

$$=\sqrt{16}=4$$

內積公式

- (1). u=(x_{1i}, x_{2i}......)和v=(x_{1j}, x_{2j}. 設 $\begin{pmatrix} x_{1i} \\ x_{2i} \\ \vdots \\ x_{ni} \end{pmatrix}$ 與 $\begin{pmatrix} x_{1j} \\ x_{2j} \\ \vdots \\ x_{nj} \end{pmatrix}$ 爲$\boldsymbol{R}^n$的任意元素

- (2). 內積公式
  - <u. v>=uv內積 = $x_{1i}x_{1j} + x_{2i}x_{2j} + \cdots + x_{ni}x_{nj}$
  - 內積inner product = 又稱為：點積dot product
  - 符號：$\begin{pmatrix} x_{1i} \\ x_{2i} \\ \vdots \\ x_{ni} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{1j} \\ x_{2j} \\ \vdots \\ x_{nj} \end{pmatrix}$

範例3：求2個向量內積

- 求2個向量內積

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2} - \sqrt{6} \\ \sqrt{2} + \sqrt{6} \end{pmatrix}$$

範例3：求2個向量內積

- 求2個向量內積

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2} - \sqrt{6} \\ \sqrt{2} + \sqrt{6} \end{pmatrix}$$

$$= 1 \times (\sqrt{2} - \sqrt{6}) + \sqrt{3} \times (\sqrt{2} + \sqrt{6})$$

$$= \sqrt{2} - \sqrt{6} + \sqrt{6} + \sqrt{18}$$

$$= \sqrt{2} + 3\sqrt{2} \qquad = 4\sqrt{2}$$

4. 向量內積與夾角公式

夾角公式

- (1). u=(x_{1i}, x_{2i}......)和v=(x_{1j}, x_{2j}.

設 $\begin{pmatrix} x_{1i} \\ x_{2i} \\ \vdots \\ x_{ni} \end{pmatrix}$ 與 $\begin{pmatrix} x_{1j} \\ x_{2j} \\ \vdots \\ x_{nj} \end{pmatrix}$ 爲 R^n 的任意元素

- (2). 內積與夾角公式

$$\begin{pmatrix} x_{1i} \\ x_{2i} \\ \vdots \\ x_{ni} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{1j} \\ x_{2j} \\ \vdots \\ x_{nj} \end{pmatrix} = \left\| \begin{pmatrix} x_{1i} \\ x_{2i} \\ \vdots \\ x_{ni} \end{pmatrix} \right\| \times \left\| \begin{pmatrix} x_{1j} \\ x_{2j} \\ \vdots \\ x_{nj} \end{pmatrix} \right\| \times \cos\theta$$

- (3). 夾角 θ 為uv之間的夾角

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|}\right)$$

柯西–史瓦茲不等式（page. 231）

柯西–史瓦茲不等式

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|}\right)$$

$$-1 \le \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|} \le 1$$

定理 5.2.1　柯西– 史瓦茲不等式

- 若u和v為實數內積空間中的向量，則

$$|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle| \le \|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|$$

範例1：R^4中兩向量夾角的餘弦值(page. 233)

求u=(4, 3, 1, −2) 和v=(−2, 1, 2, 3)向量夾角 θ 的餘弦值

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|}\right)$$

$$-1 \le \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|} \le 1$$

範例1：R^4中兩向量夾角的餘弦值(page. 233)

求u=(4, 3, 1, −2）和v=(−2, 1, 2, 3)向量夾角 θ 的餘弦值

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|}\right) \qquad -1 \le \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|} \le 1$$

- 先計算參數

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{30}, \quad \|\mathbf{v}\| = \sqrt{18}, \quad \text{及} \quad \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = -9$$

$$\cos\theta = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle}{\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|} = -\frac{9}{\sqrt{30}\sqrt{18}} = -\frac{3}{2\sqrt{15}}$$

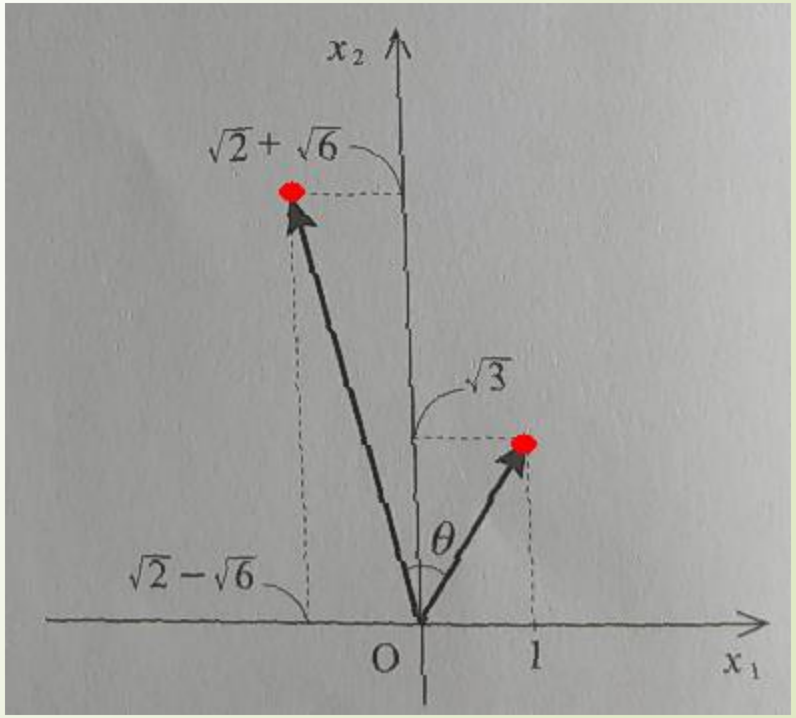
範例：求兩向量夾角的餘弦值

- 求兩向量夾角 向量$\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$與向量$\begin{pmatrix} \sqrt{2}-\sqrt{6} \\ \sqrt{2}+\sqrt{6} \end{pmatrix}$的交角 θ

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|}\right)$$

$$\cos\theta = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \sqrt{2}-\sqrt{6} \\ \sqrt{2}+\sqrt{6} \end{pmatrix}}{\left\|\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}\right\| \times \left\|\begin{pmatrix} \sqrt{2}-\sqrt{6} \\ \sqrt{2}+\sqrt{6} \end{pmatrix}\right\|}$$

$$= \frac{4\sqrt{2}}{2\times 4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$



- 得到 $\theta = 45°$

5. 向量正交的定義

向量正交的定義

- 兩向量 u 和 v，　　　　(page. 234)
- 若 $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$，
- 則稱為正交（orthogonal）

範例2：正交性與內積有關

- 兩向量 u=(1, 1) 和v=(1, −1)　　　　(page. 234)
- (1). u, v在 R^2 的尤拉內積的定義下為正交
  - 因為 $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (1)(1) + (1)(-1) = 0$
- (2). 在加權式尤拉內積的定義下不是正交
  - 因為：$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 3u_1 v_1 + 2u_2 v_2$ ，
  - 因為 $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 3(1)(1) + 2(1)(-1) = 1 \neq 0$

範例3：M_{22} 中的正交向量

- 兩個向量U, V ＝ $U = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ 和 $V = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
- U, V為正交，因為

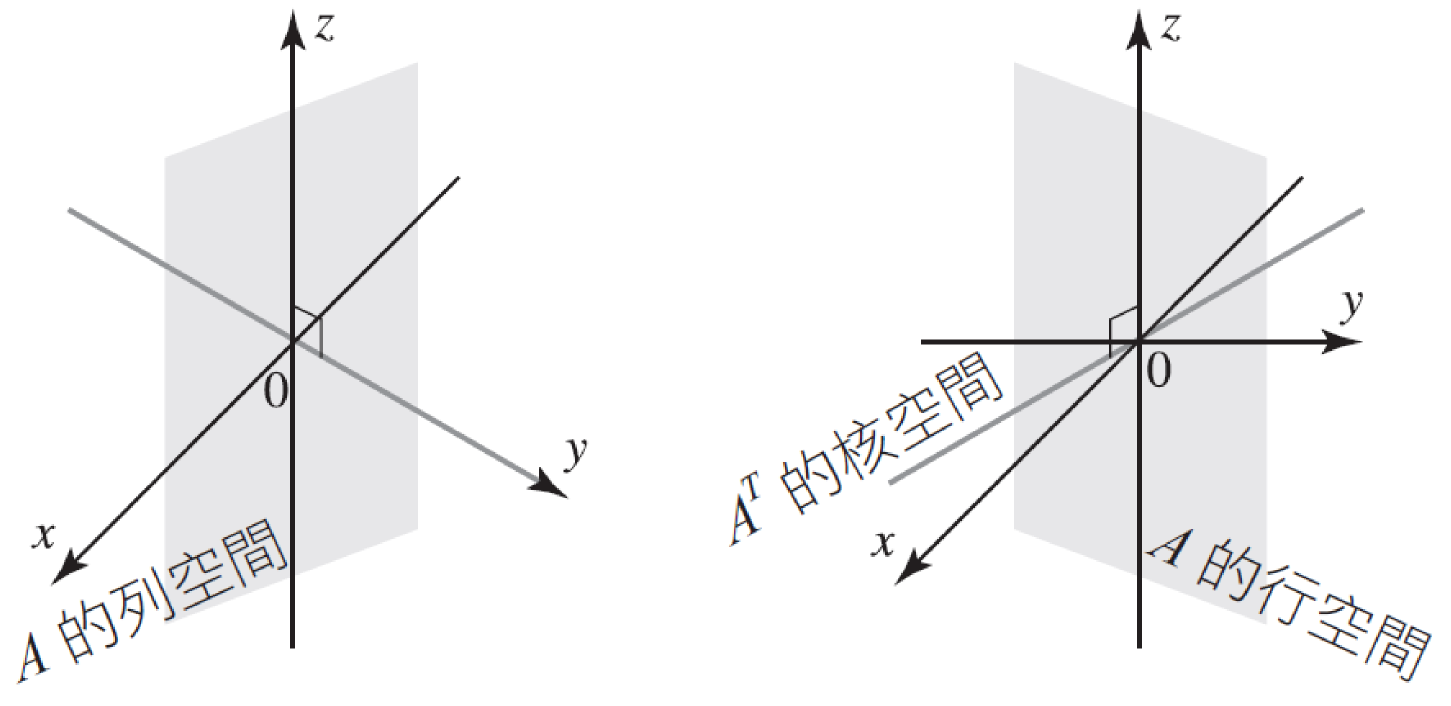
$$\langle U, V \rangle = 1(0) + 0(2) + 1(0) + 1(0) = 0$$

（page. 234）

6. 矩陣的四種基本空間的正交關係

矩陣的四種基本空間的正交關係

- (a) A 的核空間和 A 的列空間彼此正交(垂直)
- (b) A^T 的核空間和 A 的行空間彼此正交(垂直)



➲ 圖 4.8.2

(page. 213)

證明：核空間和列空間彼此正交(內積=0)

```python
from sympy import *
M = Matrix([
    [1, 3, -2, 0, 2, 0],
    [2, 6, -5, -2, 4, -3],
    [0, 0, 5, 10, 0, 15],
    [2, 6, 0, 8, 4, 18]
    ])
M_nullsapce = M.nullspace(
M_rowspace = M.rowspace()
n1, n2, n3 = M.nullspace()
r1, r2, r3 = M.rowspace()
print('n1 = ', n1)
print('r1 = ', r1)
print(n1.dot(r1))
```

```
線性轉換後有壓縮空間 = 核空間向量集合 = null space=
 [Matrix([
[-3],
[ 1],
[ 0],
[ 0],
[ 0],
[ 0]]), Matrix([
[-4],
[ 0],
[-2],
[ 1],
[ 0],
[ 0]]), Matrix([
[-2],
[ 0],
[ 0],
[ 0],
[ 1],
[ 0]])]
輸出列空間的向量之線性組和= column space=
 [Matrix([[1, 3, -2, 0, 2, 0]]), Matrix([[0, 0, -1, -2, 0, -3]]), Matrix([[0, 0, 0,
0, 0, -6]])]
n1 =  Matrix([[-3], [1], [0], [0], [0], [0]])
r1 =  Matrix([[1, 3, -2, 0, 2, 0]])
n1.dot(r1)=核空間和列空間彼此正交(內積=0) =  0
```

數學系對內積的表達法

- 1. 前面的向量內積，是我們常用的方法
- 2. 數學系對內積的寫法，與我們常用法不同
- 3. 要能夠同時使用任何的向量空間（一般向量，多項式，微分方程式，函數…）
- 4. 是實數度量線性空間的內積法

實數內積：四公理

- 若符合實數度量線性空間的X集合

設 x_i、x_j 與 x_k 為一集合 X 的任意元素，c 為任意實數

- 內積定義

定義 $x_i \cdot x_j$ 是稱為**內積**的實數

- 實數內積四公理（**四個內積的定律**）

① $x_i \cdot x_j = x_j \cdot x_i$

② $(cx_i) \cdot x_j = c\,(x_i \cdot x_j) = x_i \cdot (cx_j)$

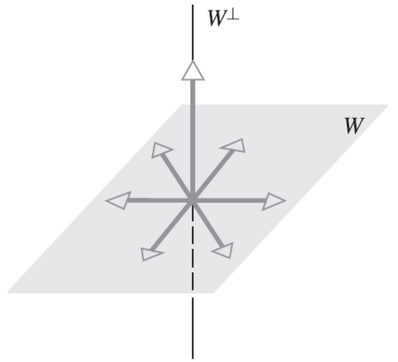
③ $x_i \cdot (x_j + x_k) = x_i \cdot x_j + x_i \cdot x_k \quad (x_i + x_j) \cdot x_k = x_i \cdot x_k + x_j \cdot x_k$

④ $x_i \cdot x_i \geqq 0$，只有在 $=0$ 時 $x_i \cdot x_i = 0$。

7. 正交補集

數學系對內積的表達法

- **定義：**
- 若 W 為實數內積空間 V 的一子空間，
- 則 V 內正交於 W 中每一向量的此種向量所成的集合，
- 稱為 W 的**正交補集**（orthogonal complement）
- 記作 $W^{\perp}$
  - (a) $W^{\perp}$ 為 V 的子空間
  - (b) $W \cap W^{\perp} = \{0\}$



➲ 圖 5.2.2　W 中的每一向量均正交於 $W^{\perp}$ 中的每一向量，其逆亦真。

範例6：正交補集的基底

- 四個向量生成W空間（為R^6 的子空間）(page. 237)

$$\mathbf{w}_1 = (1, 3, -2, 0, 2, 0), \qquad \mathbf{w}_2 = (2, 6, -5, -2, 4, -3),$$
$$\mathbf{w}_3 = (0, 0, 5, 10, 0, 15), \qquad \mathbf{w}_4 = (2, 6, 0, 8, 4, 18)$$

- 求 W 的正交補集之基底
- 也就是，求與W空間垂直（正交）的基底組合

範例6：正交補集的基底

- 四個向量生成W空間（為R^6 的子空間）(page. 237)

$$\mathbf{w}_1 = (1, 3, -2, 0, 2, 0), \qquad \mathbf{w}_2 = (2, 6, -5, -2, 4, -3),$$
$$\mathbf{w}_3 = (0, 0, 5, 10, 0, 15), \qquad \mathbf{w}_4 = (2, 6, 0, 8, 4, 18)$$

- 與W空間垂直（正交）的基底組合
- 因為W的核空間(Ax=0)，與列空間正交垂直，
- 所以本題，就是求W系統的核空間

範例6：正交補集的基底

- 子空間 W 與以下矩陣的列空間相同 (page. 237)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & -5 & -2 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 \\ 2 & 6 & 0 & 8 & 4 & 18 \end{bmatrix}$$

- 此矩陣的核空間基底為

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- 得基底向量為

$$\mathbf{v}_1 = (-3, 1, 0, 0, 0, 0), \quad \mathbf{v}_2 = (-4, 0, -2, 1, 0, 0), \quad \mathbf{v}_3 = (-2, 0, 0, 0, 1, 0)$$

8. 定義

正交基底（orthogonal basis）
正則基底（orthonormal basis）

定義

- 1. 正交基底
  - 定義：由正交向量所組成的基底，稱為正交基底（orthogonal basis）
- 2. 正則基底
  - 定義：空間中，由正則向量所組成的基底，稱為正則基底（orthonormal basis）
  - 向量的長度=1（單位向量基底）
  - 正則基底=么正基底=單範正交基底

正則基底的範例

- 1. 正則基底的範例
- 常見的正則基底= R^n 的尤拉內積的標準基底

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0), \quad \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, \quad \mathbf{e}_n = (0, 0, 0, \ldots, 1)$$

- 向量的長度=1（單位向量基底）

範例 3　正則基底

p.239

- 1. 證明v1, v2, v3是正則基底

$$\mathbf{v}_1 = (0, 1, 0), \quad \mathbf{v}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad \text{和} \quad \mathbf{v}_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

- 向量的長度=1（單位向量基底）

9. 相對於正交基底的坐標
相對於正則基底的坐標

相對於正則基底的坐標

- 1. 若 $S=\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ 為內積空間 V 中的正則基底，
- 且若 $\mathbf{u}$ 為 V 中的任意向量，則

$$\mathbf{u} = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_1 \rangle \mathbf{v}_1 + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_2 \rangle \mathbf{v}_2 + \cdots + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_n \rangle \mathbf{v}_n$$

- 坐標=($\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_1 \rangle$ ，$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_2 \rangle$ . . . . $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_n \rangle$)
- **坐標=u在每個基底v的分量（內積）**

相對於正交基底的坐標

- 1. 若 $S=\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ 為內積空間 V 中的正交基底，
- 且若u為 V 中的任意向量，則

$$\mathbf{u} = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_1 \rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1 + \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_2 \rangle}{\|\mathbf{v}_2\|^2}\mathbf{v}_2 + \cdots + \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_n \rangle}{\|\mathbf{v}_n\|^2}\mathbf{v}_n$$

- 坐標 $=\left(\frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_1 \rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2}, \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_2 \rangle}{\|\mathbf{v}_2\|^2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\right)$
- **坐標=u在每個基底v的分量（內積）/基底的長度**

範例4：相對於正則基底的座標向量

- $S=\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ 為 R^3 的正則基底

$$\mathbf{v}_1=(0,1,0),\quad \mathbf{v}_2=\left(-\tfrac{4}{5},0,\tfrac{3}{5}\right),\quad \mathbf{v}_3=\left(\tfrac{3}{5},0,\tfrac{4}{5}\right)$$

- 試以S的向量對$\mathbf{u}=(1,1,1)$做線性組合展開，並求座標向量$(\mathbf{u})_S$

範例4：相對於正則基底的座標向量

- 這種題目的解法有兩種：
- (1). 方法1：使用 $V_{B2} = P_{B1\to B2}\, V_{B1}$

計算v，在另外一個座標的表示$[\mathbf{v}]_B$

關係圖：$V_{B1} \xrightarrow{P_{B1\to B2}} V_{B2}$

關係式：$V_{B2} = P_{B1\to B2}\, V_{B1}$

$P_{B1\to B2}$（快速方法：交叉基底）

- (2). 方法2：使用坐標=u在每個基底v的分量（內積）
- 坐標=$(\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_1\rangle$，$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_2\rangle$ . . . . $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_n\rangle)$

範例4：相對於正則基底的座標向量

方法2：使用坐標=u在每個基底v的分量（內積）

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_1 \rangle = 1, \quad \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_2 \rangle = -\tfrac{1}{5}, \quad 和 \quad \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_3 \rangle = \tfrac{7}{5}$$

依據定理 5.3.2 可得

$$\mathbf{u} = \mathbf{v}_1 - \tfrac{1}{5}\mathbf{v}_2 + \tfrac{7}{5}\mathbf{v}_3$$

亦即

$$(1, 1, 1) = (0, 1, 0) - \tfrac{1}{5}\left(-\tfrac{4}{5}, 0, \tfrac{3}{5}\right) + \tfrac{7}{5}\left(\tfrac{3}{5}, 0, \tfrac{4}{5}\right)$$

因此，$\mathbf{u}$ 相對於 S 的座標向量為

$$(\mathbf{u})_S = (\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_1 \rangle, \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_2 \rangle, \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_3 \rangle) = \left(1, -\tfrac{1}{5}, \tfrac{7}{5}\right)$$

範例5：從正交基底變正則基底

- (a). $S=\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ 為 R^3 的正交基底

將此基底向量正規化後，求出正則基底

$$\mathbf{v}_1 = (0, 1, 0), \quad \mathbf{v}_2 = \left(-\tfrac{4}{5}, 0, \tfrac{3}{5}\right), \quad \mathbf{v}_3 = \left(\tfrac{3}{5}, 0, \tfrac{4}{5}\right)$$

- (b). 將向量u=(1, 2, 4)以(a)部分所得的正則基底做線性組合展開（相對於正則基底的坐標）

範例5：從正交基底變正則基底

241

- 這種題目的解法有兩種：
- (1). 方法1：使用 $V_{B2} = P_{B1\to B2} V_{B1}$

計算v，在另外一個座標的表示$[\mathbf{v}]_B$

關係圖：$V_{B1} \xrightarrow{P_{B1\to B2}} V_{B2}$

關係式：$V_{B2} = P_{B1\to B2} V_{B1}$

$P_{B1\to B2}$（快速方法：交叉基底）

- (2). 方法2：使用坐標=u在每個基底v的分量（內積）
- 坐標=($\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_1\rangle$，$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_2\rangle$ . . .   . $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_n\rangle$)

範例5：從正交基底變正則基底

方法2：使用坐標=u在每個基底v的分量（內積）

(a) 所給定的向量可為正交集，因為

$$\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \rangle = 0, \quad \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_3 \rangle = 0, \quad \langle \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3 \rangle = 0$$

根據定理 5.3.1 知，這些向量為線性獨立，且根據定理 4.5.4 知，這些向量可為 R^3 的基底。將 $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3$ 各自的長度除掉後，可得正規化後的正則基底

$$\mathbf{v}_1 = \frac{\mathbf{w}_1}{\|\mathbf{w}_1\|} = (0, 1, 0), \quad \mathbf{v}_2 = \frac{\mathbf{w}_2}{\|\mathbf{w}_2\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

$$\mathbf{v}_3 = \frac{\mathbf{w}_3}{\|\mathbf{w}_3\|} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

範例5：從正交基底變正則基底

方法2：使用坐標=u在每個基底v的分量（內積）

(b) 根據 (3) 式可知

$$\mathbf{u} = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_1 \rangle \mathbf{v}_1 + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_2 \rangle \mathbf{v}_2 + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_3 \rangle \mathbf{v}_3$$

各分量為

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_1 \rangle = (1, 2, 4) \cdot (0, 1, 0) = 2$$

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_2 \rangle = (1, 2, 4) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \frac{5}{\sqrt{2}}$$

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_3 \rangle = (1, 2, 4) \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

因此，可得

$$(1, 2, 4) = 2(0, 1, 0) + \frac{5}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) + \frac{3}{\sqrt{2}} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \blacktriangleleft$$

10. 正交投影

u在W上的投影

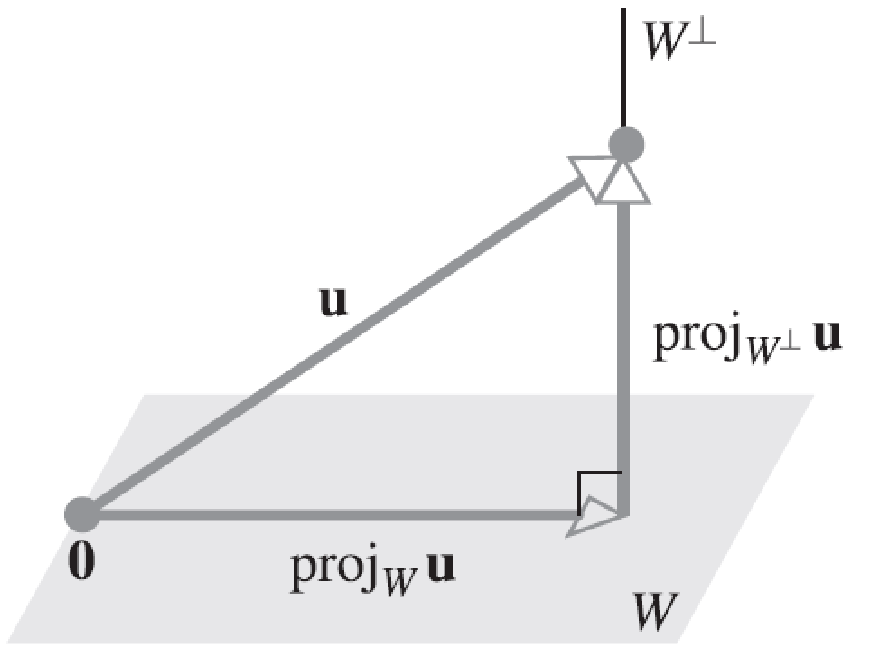
- $\mathbf{w}_1$在W中，且$\mathbf{w}_2$在$W^{\perp}$中。

$$\mathbf{u} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$$

$$\mathbf{w}_1 = \operatorname{proj}_W \mathbf{u} \quad 和 \quad \mathbf{w}_2 = \operatorname{proj}_{W^{\perp}} \mathbf{u}$$

$$\mathbf{u} = \operatorname{proj}_W \mathbf{u} + \operatorname{proj}_{W^{\perp}} \mathbf{u}$$

$$\mathbf{u} = \operatorname{proj}_W \mathbf{u} + (\mathbf{u} - \operatorname{proj}_W \mathbf{u})$$



➲ 圖 5.3.1

相對於正交基底的正交投影

- 1. 若 $S=\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ 為內積空間 V 中的正交基底，
- 且若 $\mathbf{u}$ 為 V 中的任意向量，則

$$\operatorname{proj}_W \mathbf{u} = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_1 \rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1 + \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_2 \rangle}{\|\mathbf{v}_2\|^2}\mathbf{v}_2 + \cdots + \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_r \rangle}{\|\mathbf{v}_r\|^2}\mathbf{v}_r$$

- 坐標=$\left(\frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_1 \rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2}, \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_2 \rangle}{\|\mathbf{v}_2\|^2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \right)$
- 坐標=u在每個基底v的分量（內積）/基底的長度

相對於正則基底的正交投影

- 1. 若$S=\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$為內積空間$V$中的正則基底，
- 且若$\mathbf{u}$為V中的任意向量，則

$$\text{proj}_W \mathbf{u} = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_1 \rangle \mathbf{v}_1 + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_2 \rangle \mathbf{v}_2 + \cdots + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_r \rangle \mathbf{v}_r$$

- 坐標=($\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_1 \rangle$，$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_2 \rangle$..........$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_n \rangle$)
- 坐標=u在每個基底v的分量（內積）

範例6：計算投影

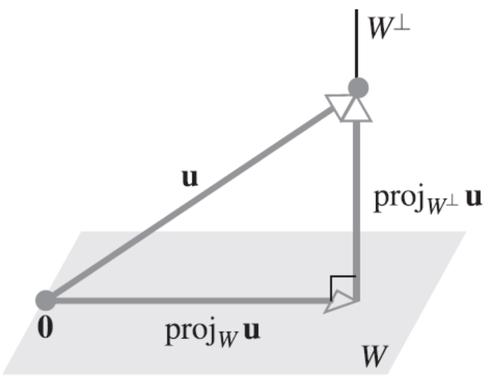
- 計算u=(1, 1, 1)在正則基底s={v1, v2}上的投影向量？

  $\mathbf{v}_1=(0, 1, 0)$和$\mathbf{v}_2 = (-\frac{4}{5}, 0, \frac{3}{5})$

範例6：計算投影

- $\mathbf{v}_1=(0, 1, 0)$和$\mathbf{v}_2 = \left(-\frac{4}{5}, 0, \frac{3}{5}\right)$
- (1). 計算$\mathbf{u}=(1, 1, 1)$在正則基底$S=\{v1, v2\}$上的投影向量=

$$\begin{aligned}\operatorname{proj}_W \mathbf{u} &= \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_1\rangle \mathbf{v}_1 + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_2\rangle \mathbf{v}_2 \\ &= (1)(0, 1, 0) + \left(-\tfrac{1}{5}\right)\left(-\tfrac{4}{5}, 0, \tfrac{3}{5}\right) \\ &= \left(\tfrac{4}{25}, 1, -\tfrac{3}{25}\right)\end{aligned}$$



➲ 圖 5.3.1

- (2). $\mathbf{u}$正交於W的分量為

$$\operatorname{proj}_{W^{\perp}} \mathbf{u} = \mathbf{u} - \operatorname{proj}_W \mathbf{u} = (1, 1, 1) - \left(\tfrac{4}{25}, 1, -\tfrac{3}{25}\right) = \left(\tfrac{21}{25}, 0, \tfrac{28}{25}\right)$$

11. 把基底$\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ... \mathbf{u}_r\}$轉換成正交基底$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ... \mathbf{v}_r\}$的方法：

葛蘭-史密特正交程序

Gram-Schmidt orthogonalization

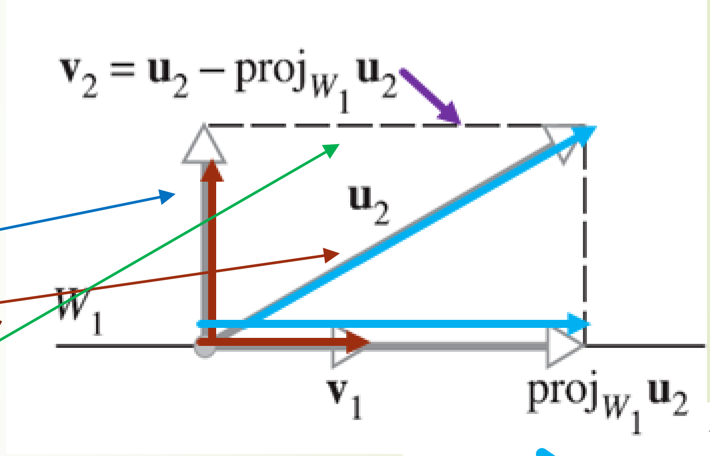
葛蘭-史密特正交程序
Gram-Schmidt orthogonalization

- 把基底$\{u_1, u_2, ..u_r\}$轉換成正交基$\{v_1, v_2, ..v_r\}$

需進行以下操作：

選定某個u1當作第一個正交基底v1

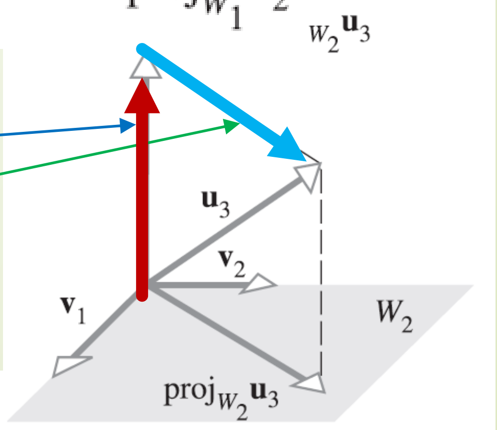
- 步驟 1、 $\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1$



- 步驟 2、 $\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_2 - \dfrac{\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1 \rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1$

- 步驟 3、 $\mathbf{v}_3 = \mathbf{u}_3 - \dfrac{\langle \mathbf{u}_3, \mathbf{v}_1 \rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1 - \dfrac{\langle \mathbf{u}_3, \mathbf{v}_2 \rangle}{\|\mathbf{v}_2\|^2}\mathbf{v}_2$

- 步驟 4、 $\mathbf{v}_4 = \mathbf{u}_4 - \dfrac{\langle \mathbf{u}_4, \mathbf{v}_1 \rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1 - \dfrac{\langle \mathbf{u}_4, \mathbf{v}_2 \rangle}{\|\mathbf{v}_2\|^2}\mathbf{v}_2 - \dfrac{\langle \mathbf{u}_4, \mathbf{v}_3 \rangle}{\|\mathbf{v}_3\|^2}\mathbf{v}_3$

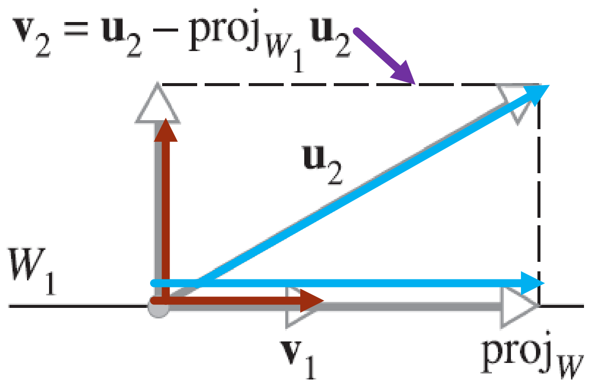


➲ 圖 5.3.4

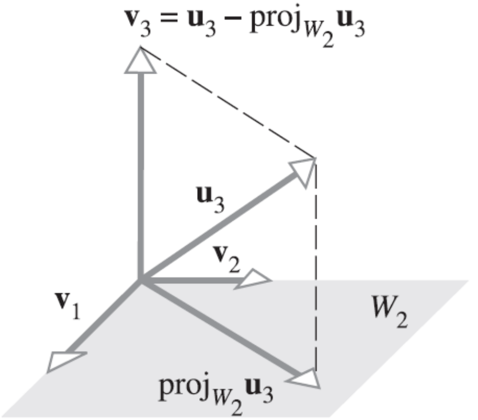
葛蘭-史密特正交程序
Gram-Schmidt orthogonalization

- 把基底$\{u_1, u_2, ... u_r\}$轉換成正交基$\{v_1, v_2, ... v_r\}$需進行以下操作：

- 步驟 1、 $\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1$
- 步驟 2、 $\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_2 - \frac{\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1 \rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1$
- 步驟 3、 $\mathbf{v}_3 = \mathbf{u}_3 - \frac{\langle \mathbf{u}_3, \mathbf{v}_1 \rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1 - \frac{\langle \mathbf{u}_3, \mathbf{v}_2 \rangle}{\|\mathbf{v}_2\|^2}\mathbf{v}_2$
- 步驟 4、 $\mathbf{v}_4 = \mathbf{u}_4 - \frac{\langle \mathbf{u}_4, \mathbf{v}_1 \rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1 - \frac{\langle \mathbf{u}_4, \mathbf{v}_2 \rangle}{\|\mathbf{v}_2\|^2}\mathbf{v}_2 - \frac{\langle \mathbf{u}_4, \mathbf{v}_3 \rangle}{\|\mathbf{v}_3\|^2}\mathbf{v}_3$



➲ 圖 5.3.3



➲ 圖 5.3.4

葛蘭-史密特正交程序

Page. 246

- 步驟 4、$\mathbf{v}_4 = \mathbf{u}_4 - \dfrac{\langle \mathbf{u}_4, \mathbf{v}_1 \rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1 - \dfrac{\langle \mathbf{u}_4, \mathbf{v}_2 \rangle}{\|\mathbf{v}_2\|^2}\mathbf{v}_2 - \dfrac{\langle \mathbf{u}_4, \mathbf{v}_3 \rangle}{\|\mathbf{v}_3\|^2}\mathbf{v}_3$

- （持續 r 個步驟）
- 可選步驟、將正交基底 $\{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ 經由正規化每一基底向量後，
- 可得正則基底 $\{q_1, q_2, \ldots, q_r\}$。

範例7：使用葛蘭-史密特正交程序

- 把三個非正交的向量 (page. 246)
  - $u_1=(1,1,1), u_2=(0,1,1), u_3=(0, 0, 1)$
- 轉換成正交基底 $\{v_1, v_2, v_3\}$
- 並正規化後得出正則基底 $\{q_1, q_2, q_3\}$

範例7：使用葛蘭-史密特正交程序

$u_1=(1,1,1), u_2=(0,1,1), u_3=(0,\ 0,\ 1)$ (page. 246)

步驟 1、$\mathbf{v}_1=\mathbf{u}_1=(1,1,1)$

步驟 2、$$\mathbf{v}_2=\mathbf{u}_2-\operatorname{proj}_{W_1}\mathbf{u}_2=\mathbf{u}_2-\frac{\langle\mathbf{u}_2,\mathbf{v}_1\rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1$$

$$=(0,1,1)-\frac{2}{3}(1,1,1)=\left(-\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$$

範例7：使用葛蘭-史密特正交程序

$u_1=(1, 1, 1), u_2=(0, 1, 1), u_3=(0,\ \ 0,\ \ 1)$ (page. 246)

步驟 3、$\mathbf{v}_3=\mathbf{u}_3-\operatorname{proj}_{W_2}\mathbf{u}_3=\mathbf{u}_3-\dfrac{\langle\mathbf{u}_3,\mathbf{v}_1\rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1-\dfrac{\langle\mathbf{u}_3,\mathbf{v}_2\rangle}{\|\mathbf{v}_2\|^2}\mathbf{v}_2$

$$=(0,0,1)-\frac{1}{3}(1,1,1)-\frac{1/3}{2/3}\left(-\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$$

$$=\left(0,-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$$

範例7：使用葛蘭-史密特正交程序

- 得到三個正交向量，但長度不為1（page. 246）

$$\mathbf{v}_1 = (1, 1, 1), \quad \mathbf{v}_2 = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right), \quad \mathbf{v}_3 = \left(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

- 把它們正規化，讓長度為1

$$\|\mathbf{v}_1\| = \sqrt{3}, \quad \|\mathbf{v}_2\| = \frac{\sqrt{6}}{3}, \quad \|\mathbf{v}_3\| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

- 算出三個正則向量

$$\mathbf{q}_1 = \frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right),$$

$$\mathbf{q}_2 = \frac{\mathbf{v}_2}{\|\mathbf{v}_2\|} = \left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

$$\mathbf{q}_3 = \frac{\mathbf{v}_3}{\|\mathbf{v}_3\|} = \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

範例7 Python程式碼

```
from sympy import *
M = [Matrix([1,1,1]), Matrix([0,1,1]), Matrix([0,0,1])]
GramSchmidt(M)
M_GS = GramSchmidt(M, True)
q1,q2,q3 = GramSchmidt(M, True)
print(’1.把M矩陣製造出正交基底=\n’, M_GS)
print(’q1正交基底 = ’, q1)
print(’q2正交基底 = ’, q2)
print(’q3正交基底 = ’, q3)
```

```
q1正則基底 =  Matrix([[sqrt(3)/3], [sqrt(3)/3], [sqrt(3)/
3]])
q2正則基底 =  Matrix([[-sqrt(6)/3], [sqrt(6)/6], [sqrt(6)/
6]])
q3正則基底 =  Matrix([[0], [-sqrt(2)/2], [sqrt(2)/2]])
```

12. 常見的三種矩陣分解

常見的三種矩陣分解

- 矩陣分解 (decomposition, factorization)
  - 是將矩陣拆解為數個矩陣的乘積，
  - 包括：三角分解、滿秩分解、QR分解、Jordan分解和SVD（奇異值）分解
- 常見的有三種：
  - 1)三角分解法(Triangular Factorization)=LU分解
  - 2)QR 分解法 (QR Factorization)，
  - 3)奇異值分解法 (Singular Value Decomposition)

奇異值分解法 (Singular Value Decomposition

- SVD分解法的用途：
  - (1). 解最小平方誤差法
  - (2). 數據壓縮。
- 矩陣的奇異值用途：
  - (1). 最優化問題、
  - (2). 特徵值問題、
  - (3). 最小二乘方向題、
  - (4). 廣義逆矩陣問題
  - (5). 統計學等方面都有重要的作用

13. 把矩陣A進行QR分解

QR分解的重要性

- QR分解法是**三種將矩陣分**解的方式之一
  - LU分解，QR分解，SVD奇異值分解
- 結果：把矩陣A分解成一個**正交矩陣**與一個**上三角矩陣**的積(A=QR)
- 用途：
  - QR分解經常用來解**線性最小二乘法**問題。
  - QR分解也是**特定特徵值算法（**QR算法）的基礎
  - 常用來處理**大型矩陣的特徵值**

範例8：把矩陣A進行QR分解

- 把矩陣A進行QR分解　　　　(page. 250)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

QR分解法建立單範正交基底

- (2).方法：QR分解法
  - 要先進行葛蘭-史密特正交程序運算，得出q1,q2,q3
  - 就可以把矩陣A分解成QR
  - Q的行空間，就是單範正交基底向量

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$A = Q \quad R$$

QR分解法建立單範正交基底

(2).方法：QR分解法

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$A = Q \qquad R$$

$$R = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{q}_1 \rangle & \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{q}_1 \rangle & \langle \mathbf{u}_3, \mathbf{q}_1 \rangle \\ 0 & \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{q}_2 \rangle & \langle \mathbf{u}_3, \mathbf{q}_2 \rangle \\ 0 & 0 & \langle \mathbf{u}_3, \mathbf{q}_3 \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

範例8：使用QR分解法求正則基底

(page. 250)

- 三個行向量

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- 用葛蘭-史密特法算正則基底

$$\mathbf{q}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_2 = \begin{bmatrix} -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

- 即可算出R

$$R = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{q}_1 \rangle & \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{q}_1 \rangle & \langle \mathbf{u}_3, \mathbf{q}_1 \rangle \\ 0 & \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{q}_2 \rangle & \langle \mathbf{u}_3, \mathbf{q}_2 \rangle \\ 0 & 0 & \langle \mathbf{u}_3, \mathbf{q}_3 \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

- 最後算出Q

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}}_{Q} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}}_{R}$$

Python程式碼

```
from sympy import *
M = Matrix([
    [1,0,0],
    [1,1,0],
    [1,1,1]
    ])
Q,R = M.QRdecomposition()
print("用QR分解法，求出正則基底=\n", Q)
q1 = Q.col(0)
q2 = Q.col(1)
q3 = Q.col(2)
print('q1 = ', q1)
print('q2 = ', q2)
print('q3 = ', q3)
```

```
用QR分解法，求出正則基底=
 Matrix([[sqrt(3)/3, -sqrt(6)/3, 0], [sqrt(3)/3, sqrt(6)/6, -sqrt(2)/2], [sqrt(3)/3, sqrt(6)/6, sqrt(2)/2]])
q1 =  Matrix([[sqrt(3)/3], [sqrt(3)/3], [sqrt(3)/3]])
q2 =  Matrix([[-sqrt(6)/3], [sqrt(6)/6], [sqrt(6)/6]])
q3 =  Matrix([[0], [-sqrt(2)/2], [sqrt(2)/2]])
```

14. 正交矩陣的定義

正交矩陣的定義

定義 6-1-2

若一方陣 A 具有下列性質

$$A^{-1} = A^{T}$$

則稱 A 為**正交矩陣**。

- 若矩陣A的反矩陣 ＝ A的轉置矩陣
- 則A就是正交矩陣

正交矩陣的範例：旋轉矩陣

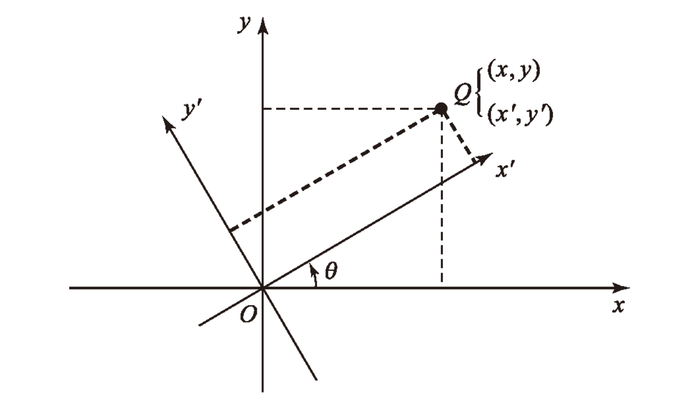


圖 6-1-2

- 正交矩陣的範例：旋轉矩陣
- 若矩陣A逆時針旋轉，則A的轉移矩陣= $A=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$,
- A的反矩陣 = A的轉置矩陣，則A就是正交矩陣

則 $A^{-1}=A^T=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$

故 A 為正交矩陣，$\det(A)=1$。

正交矩陣的範例：旋轉矩陣

例題 9

令一直角 $x'y'$ 坐標系為另一直角 xy 坐標系逆時針旋轉一個角度 $\theta=\frac{3}{4}\pi$ 後所得。

(1) 求 xy 坐標為 $Q(-2,6)$ 之點的 $x'y'$ 坐標。

(2) 求 $x'y'$ 坐標為 $Q'(5,2)$ 之點的 xy 坐標。

(1) 轉移矩陣為 $A=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$, $\theta=\frac{3}{4}\pi$

所以， $A=\begin{bmatrix}\cos\frac{3}{4}\pi & -\sin\frac{3}{4}\pi\\ \sin\frac{3}{4}\pi & \cos\frac{3}{4}\pi\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$

- 若矩陣A逆時針旋轉，則A的轉移矩陣= $\begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$
- A的反矩陣 = A的轉置矩陣= $A^{-1}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$
- 則A就是正交矩陣

則 $A^{-1}=A^T=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$

15. 證明由葛蘭-史密特正交程序把基底{u1, u2, ..ur}轉換成正交基底{v1, v2, ..vr}

形成的矩陣Q為正交矩陣

證明$Q^{-1}= Q^T$

- 1. 已知道由葛蘭-史密特正交程序把基底{v1, v2, . . vr}轉換成正交基底{u1, u2, . . ur}

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

- 證明$Q^{-1}= Q^T$

證明$Q^{-1} = Q^T$

- 1. $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$
- 2. $\mathbb{R}^3$ 中的正規正交基底，則方陣

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

- 證明$Q^{-1} = Q^T$

$$Q^TQ = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}。$$

- 結論：

證明$Q^{-1} = Q^T$

- 1. $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$, $\mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$

$\mathbb{R}^3$ 中的正規正交基底，則方陣

$$\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

- 已經證明$Q^{-1} = Q^T$
- 已經證明Q^T Q =I
- 結論：
  - 由葛蘭-史密特正交程序把基底{u1, u2, ..ur}轉換成正交基底{v1, v2, ..vr}

形成的矩陣Q為正交矩陣

16. 把矩陣對角化的兩種方法

把矩陣對角化的兩種方法（特徵值對角矩陣）

- 1. 第一種：使用特徵向量矩陣P
- 方法：$P^{-1}AP$ = 特徵值在對角線的矩陣
  - 其中P是A的特徵向量所組成的

$$P^{-1}AP = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}}_{P-1} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 21 & 0 & 3 \end{bmatrix}}_{A} \boxed{\underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{P}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

把矩陣對角化的兩種方法（特徵值對角矩陣）

- 2. 第二種：使用特徵向量的正交基底形成的正交矩陣Q
- 方法：$Q^{-1}AQ\,(=Q^{T}AQ)=D$ = 特徵值在對角線的矩陣
  - 其中Q是A的特徵向量的正交基底所組成的

$$Q^{T}AQ=\begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{3\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{4}{3\sqrt{2}} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{4}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}。$$

17.把矩陣A進行
正交對角化

把矩陣A進行正交對角化（特徵值對角矩陣）

- 2. 第二種：使用正交基底形成的正交矩陣Q
- 方法：$Q^{-1}AQ\,(=Q^{T}AQ)=D$ ＝ 特徵值在對角線的矩陣
  - 其中Q是A的特徵向量的正交基底所組成的

已知方陣 A，若存在一正交方陣 Q 使得

$$Q^{-1}AQ\,(=Q^{T}AQ)=D$$

- 注意1：其中 $D=\operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$，且 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 為方陣 A 的特徵
- 注意2：A必須為對稱矩陣

把矩陣A進行正交對角化的解題步驟（特徵值對角矩陣）

步驟 1. 對 A 的每一特徵空間求一基底。

步驟 2. 對 A 的每一個特徵空間，應用格蘭姆-史密特的正交化過程，求得一正規正交基底。

步驟 3. 由 2.中所得的正規正交特徵向量作為方陣 Q 的行向量，此方陣 Q 將可正交對角線化方陣 A。

範例10：把矩陣A進行正交對角化

試求一正交方陣 $\boldsymbol{Q}$ 使

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

為對角線化。

範例10：把矩陣A進行正交對角化

- 1. 先求特徵值

A 的特徵方程式為

$$\det(\lambda I_3 - A) = \begin{vmatrix} \lambda-5 & -4 & -2 \\ -4 & \lambda-5 & -2 \\ -2 & -2 & \lambda-2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda-1 & -\lambda+1 & 0 \\ 0 & \lambda-1 & -2\lambda+2 \\ -2 & -2 & \lambda-2 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-1)^2(\lambda-10)$$

$$= 0$$

故 A 的特徵值為 $\lambda = 1,\ 1,\ 10$。

範例10：把矩陣A進行正交對角化

- 2. 再求特徵向量

(i) 對 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$，求得線性獨立特徵向量

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

(ii) 對 $\lambda_3 = 10$，求得特徵向量

$$\mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

範例10：把矩陣A進行正交對角化

- 3. 再把特徵向量，經由葛蘭-史密特正交程序把基底{u1, u2, ..ur}轉換成正交基底

對 $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\}$ 應用格蘭姆-史密特正交化過程，求正規正交特徵向量如下：

我們令

$$\mathbf{u}_1 = \frac{\mathbf{x}_1}{\|\mathbf{x}_1\|} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}$$

則

$$\mathbf{x}'_2 = \mathbf{x}_2 - (\mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 2 \end{bmatrix}$$

範例10：把矩陣A進行正交對角化

- 3.再把特徵向量，經由葛蘭-史密特正交程序把基底{u1,u2,..ur}轉換成正交基底

且 $\|\mathbf{x}'_2\| = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$，故

$$\mathbf{u}_2 = \frac{\mathbf{x}'_2}{\|\mathbf{x}'_2\|} = \frac{2}{3\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{3\sqrt{2}} \\ \frac{4}{3\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

而 $\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 = \dfrac{1}{6} - \dfrac{1}{6} + 0 = 0$，即，$\mathbf{u}_1 \perp \mathbf{u}_2$。

範例10：把矩陣A進行正交對角化

- 3. 再把特徵向量，經由葛蘭-史密特正交程序把基底{u1, u2, ...ur}轉換成正交基底

對 $\{\mathbf{x}_3\}$ 應用格蘭姆-史密特法，可得

$$\mathbf{u}_3 = \frac{\mathbf{x}_3}{\|\mathbf{x}_3\|} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

又

$$\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_3 = -\frac{2}{3\sqrt{2}} + \frac{2}{3\sqrt{2}} + 0 = 0$$

$$\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_3 = -\frac{2}{9\sqrt{2}} - \frac{2}{9\sqrt{2}} + \frac{4}{9\sqrt{2}} = 0$$

範例10：把矩陣A進行正交對角化

- 3. 再把特徵向量，經由葛蘭-史密特正交程序把基底{u1, u2, ..ur}轉換成正交基底

故 $\mathbf{u}_1 \perp \mathbf{u}_3$ 且 $\mathbf{u}_2 \perp \mathbf{u}_3$。於是，

$$Q = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{4}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

範例10：把矩陣A進行正交對角化

- 4. 正交對角化公式= $Q^T AQ = D$

$$Q^TAQ = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{3\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{4}{3\sqrt{2}} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{4}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}。$$

A 的特徵值為 $\lambda = 1,\ 1,\ 10$。

18. 矩陣分解在人臉識別中的應用

人臉特徵可分為四類

- 1. 目前可利用人臉特徵可分為四類:
  - 視覺特徵、統計特徵、變換係數特徵、代數特徵
- 2. 代數特徵
  - 代數特徵是人臉的本質特徵,表征了人臉圖像的內在特性。
- 3. 目前典型的代數特徵主要包括
  - (1). 奇異值特徵
  - (2). 本徵臉(Eigenfaces)特徵

奇異值分SVD在人臉識別中的應用

- 奇異值特徵的人臉識別方法
  - 把人臉圖像視為一個矩陣,
  - 進行奇異值分解
  - 從而提取其奇異值特徵,
  - 並投影到 Foley2Sammon 最佳鑑別平面進行識別

QR分解在人臉識別中的應用

- QR分解的人臉識別方法
  - 利用矩陣的QR分解實現數據的預處理，
  - 並且在低維的空間內實現了特徵提取，實現算法的實時處理。
  - 最後，在ORI人臉資料庫上的實驗結果驗證方法的有效性

奇異值分解在人臉識別中的應用

- 人臉識別方法的有效性都依賴於兩方面：
  - 1. 特徵提取（即尋找有效的特徵，是解決識別問題的關鍵）
  - 2. 特徵匹配
- 代數特徵
  - 是由圖像本身的灰度分布所確定的，它描述了圖像的內在信息，
  - 而這種內在信息對增強圖像的識別能力是非常重要的
- 奇異值分解
  - 就是一種很有效的代數特徵，
  - 所以奇異值分解在數據壓縮、信號處理和模式分析等許多方面都獲得廣泛應用

19. 正交投影

二維正交投影

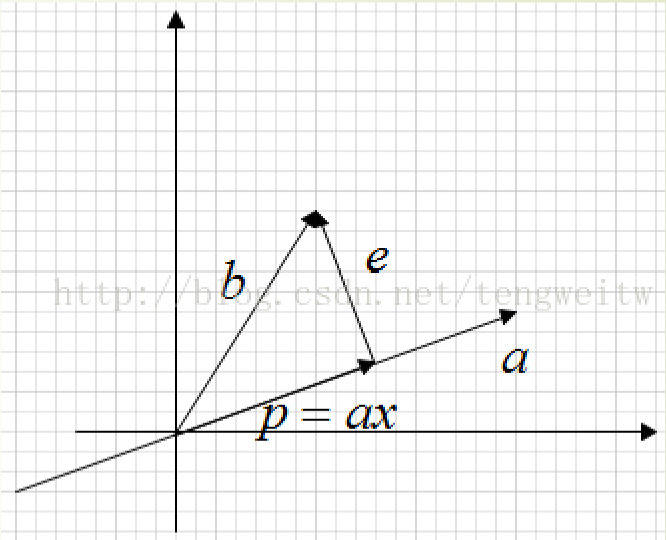
- 向量b在向量a上的投影

$$e = b - p = b - xa$$

$$a^T e = 0 \rightarrow a^T(b - xa) = 0 \rightarrow xa^T a = a^T b \rightarrow x = \frac{a^T b}{a^T a}$$

$$p = ax = a\frac{a^T b}{a^T a}$$

$$Pb = p \rightarrow \boxed{P = \frac{aa^T}{a^T a}}$$



- 其中，P為投影矩陣

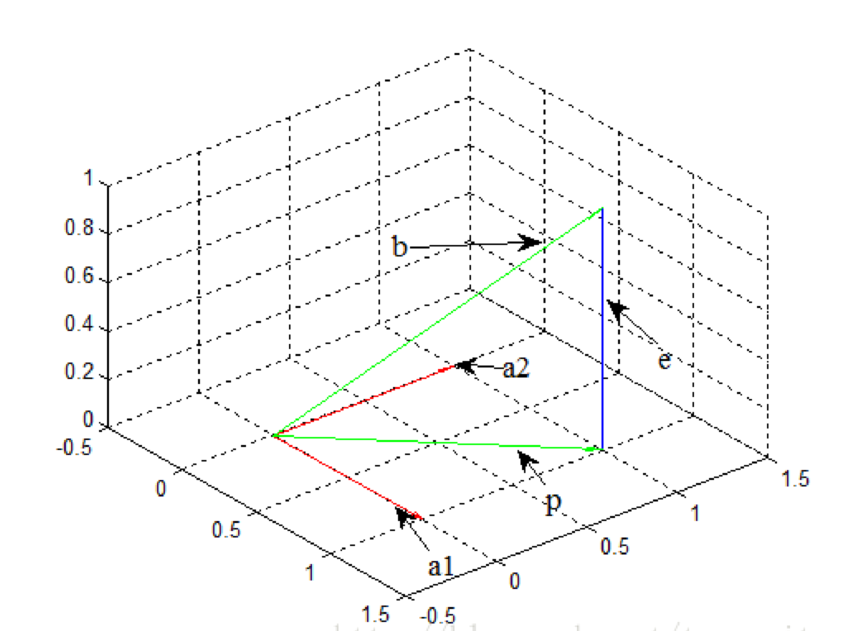
$$P^T = P$$

$$P^2 = P$$

三維正交投影

- 將一個向量投影到一個平面上。
- 將b向量投影到平面上的p向量，則表示式 $e = b - p$
  - e是垂直與平面的向量。
  - 由於p向量在平面上，則p向量可以由該平面的2個線性無關向量(正如，在xy平面的任何向量都可以由x軸，y軸表示)

$$p = x_1 a_1 + x_2 a_2$$
$$= Ax$$
$$A = [a_1 \quad a_2]$$
$$x = [x_1 \quad x_2]$$



三維正交投影

e垂直平面，則e向量垂直與平面中的任意向量，則：

$$e = b - p = b - Ax$$

$$a_1^T (b - Ax) = 0$$

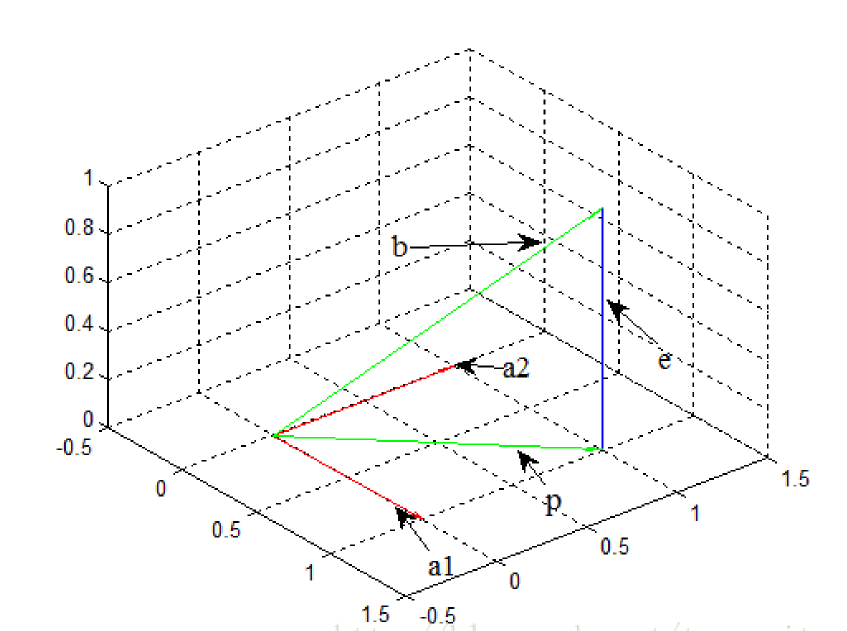
$$a_2^T (b - Ax) = 0$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} a_1^T \\ a_2^T \end{bmatrix} [b - Ax] = 0 \rightarrow A^T (b - Ax) = 0$$

將上式化簡求得x：

$$A^T Ax = A^T b$$

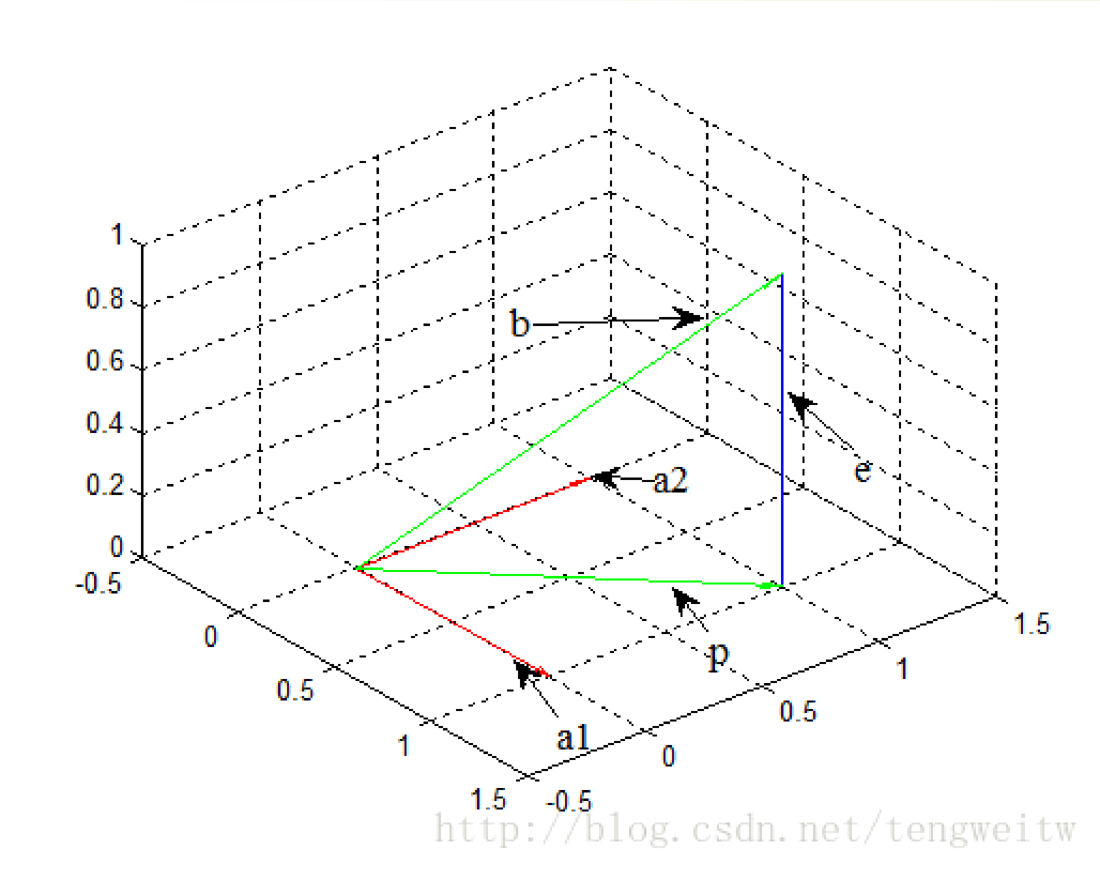
$$x = \left(A^T A\right)^{-1} A^T b$$



三維正交投影

因為p=Ax，Pb=p，則得到投影矩陣為：

$$P=\boxed{A\left(A^{T}A\right)^{-1}A^{T}}$$



範例12：三維正交投影

- b投影到水平面上，其投影為p，a1, a2為水平面的兩個向量

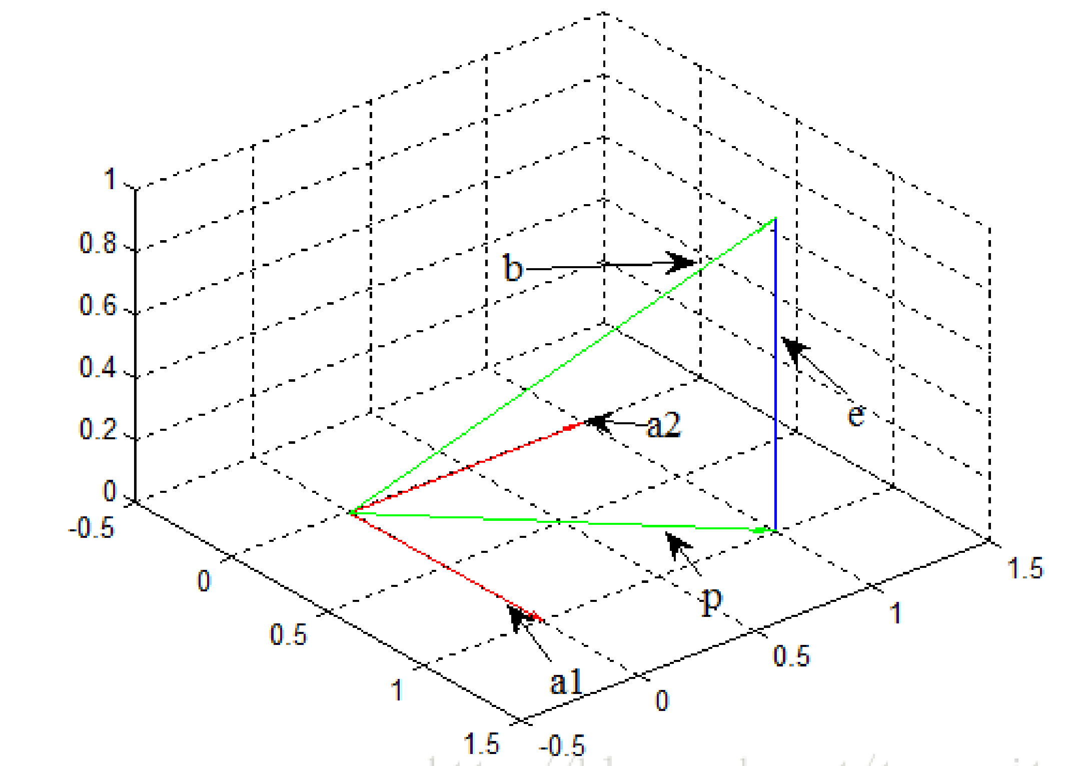
$$b=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},a_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},a_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\Rightarrow A=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{bmatrix}$$

- 投影矩陣P:

$$P=\boxed{A\left(A^TA\right)^{-1}A^T=}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

- b在水平面上的投影p為：

$$p=Pb=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$$



碩士班考題

What is the projection of (1, 1, 1) onto the plane spanned by (1, 0, 0) and (1, 0, −1)? （清大資工）

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}\Rightarrow \mathbf{A}\,(\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$$

碩士班考題

例 25： Let $\mathbf{a}_1=[1, 1, 0]'$, $\mathbf{a}_2=[2, 3, 0]'$ and $\mathbf{b}=[4, 5, 6]^T$. Find the projection vector of $\mathbf{b}$ onto the plane that is spanned by the vectors $\mathbf{a}_1$ and $\mathbf{a}_2$. （95 清華資應所）

解

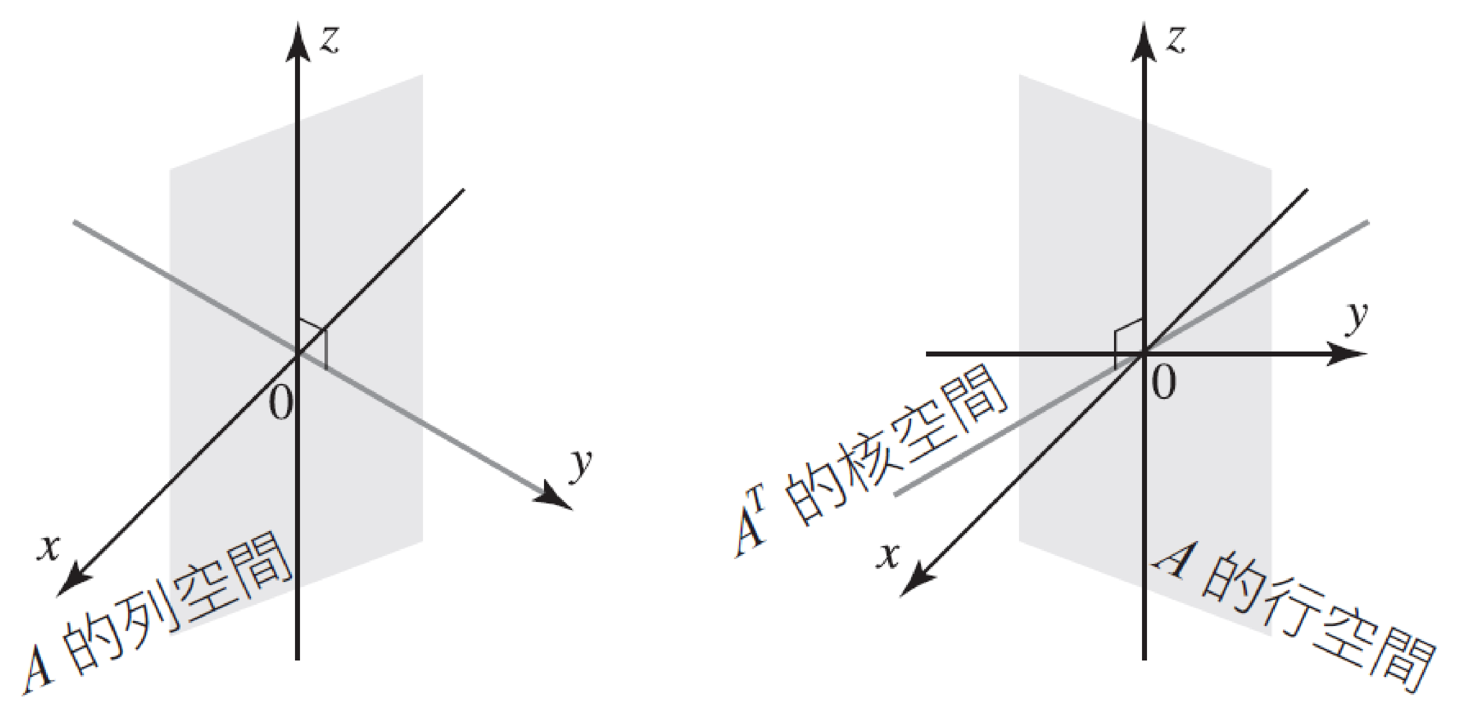
令 $W=\text{span}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$, $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 3\\ 0 & 0\end{bmatrix}$，則 $\mathbf{b}$ 在 W 上的 projection vector 為

$$\mathbf{A}(\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{b}=\begin{bmatrix}4\\ 5\\ 0\end{bmatrix}$$

20. 矩陣的四種基本空間的正交關係

矩陣的四種基本空間的正交關係

- (a) A 的核空間和 A 的列空間彼此正交(垂直)
- (b) A^T 的核空間和 A 的行空間彼此正交(垂直)



➲ 圖 4.8.2

(page. 213)

證明：核空間和列空間彼此正交(內積=0)

```
from sympy import *
M = Matrix([
    [1, 3, -2, 0, 2, 0],
    [2, 6, -5, -2, 4, -3],
    [0, 0, 5, 10, 0, 15],
    [2, 6, 0, 8, 4, 18]
    ])
M_nullsapce = M.nullspace(
M_rowspace = M.rowspace()
n1, n2, n3 = M.nullspace()
r1, r2, r3 = M.rowspace()
print('n1 = ', n1)
print('r1 = ', r1)
print(n1.dot(r1))
```

```
線性轉換後有壓縮空間 = 核空間向量集合 = null space=
 [Matrix([
[-3],
[ 1],
[ 0],
[ 0],
[ 0],
[ 0]]), Matrix([
[-4],
[ 0],
[-2],
[ 1],
[ 0],
[ 0]]), Matrix([
[-2],
[ 0],
[ 0],
[ 0],
[ 1],
[ 0]])]
輸出列空間的向量之線性組和= column space=
 [Matrix([[1, 3, -2, 0, 2, 0]]), Matrix([[0, 0, -1, -2, 0, -3]]), Matrix([[0, 0, 0,
0, 0, -6]])]
n1 =  Matrix([[-3], [1], [0], [0], [0], [0]])
r1 =  Matrix([[1, 3, -2, 0, 2, 0]])
n1.dot(r1)=核空間和列空間彼此正交(內積=0) =  0
```

21. 單範正交基底（orthogonal basis）

單範正交基底(orthogonal basis)

- 特色：都是基底向量，長度為1，彼此垂直正交(內積為0)
- 例如2D正交基底：

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\} \qquad \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

- 例如3D正交基底：

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\frac{1}{\sqrt{21}}\begin{pmatrix}4\\1\\-2\end{pmatrix},\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}\right\}$$

- 特殊單範正交基底

= 標準基底

= 自然基底

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix},\ldots,\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}\right\}$$

如何建立單範正交基底

- (1).方法：葛蘭-史密特正交程序 (page.246)
  - gram Schmidt process
  - 功能：可以把非正交非單範的基底，製造出『單範正交基底向量』
- (2).方法：QR分解法
  - 要先進行葛蘭-史密特正交程序運算，得出q1,q2,q3
  - 可以把矩陣分解成QR
  - Q的行空間，就是單範正交基底向量